Indécomposabilité de la loi de Poisson

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
- 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 266 : Illustration de la notion d'indépendance.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y$ alors X et Y suivent des loi de Poisson.*

Preuve : Soit G_Z, (resp. G_X, G_Y) la série génératrice de Z (resp. X, Y). On a par indépendance de X et Y, la décomposition $\forall |z| < 1$, $G_Z(z) = G_X(z)G_Y(z)$.
On a pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n)s^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)} \end{aligned}$$

Nous allons identifions la loi de X et Y en identifiant les fonctions génératrices G_X et G_Y.

Étape 1 : Montrons qu'il existe F, G des fonctions entières tel que $G_X = e^F$ et $G_Y = e^G$.

G_X et G_Y se développement en série entière à coefficients positifs.
On a par indépendance de X et Y, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = 0) \leq \mathbb{P}(Z = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ avec de plus $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Z = 0) \neq 0$, donc $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$ donc $\mathbb{P}(X = n) \leq \dfrac{e^{-\lambda}}{\mathbb{P}(Y = 0)}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.
Donc, par comparaison, G_X (et de même G_Y) est somme de série entière de rayon de convergence infini.

Par le principe du prolongement analytique, l'identité valable pour $|z| \leq 1$, se prolonge sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, G_X(z)G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Ainsi, G_X et G_Y ne s'annulent pas, donc il existe F, G analytique sur $\mathbb{C}$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} G_X = e^F \\ G_Y = e^G \end{array} \right.$.

Étape 2 : Identifions F et G.

Si $|z| = r \geq 1$, alors $|G_X(z)| \leq G_X(|z|) = G_X(r)$ car les coefficients de la série entière définissant G_X sont positifs.
De plus, $\mathbb{P}(Y=0)G_X(r) \leq G_X(r)G_Y(r) = e^{\lambda(r-1)}$.
Donc, $|G_X(z)| = \underbrace{|\exp(F(z))|}_{=\exp(\mathrm{Re}(F(z)))} \leq Ce^{\lambda(r-1)}$ avec $C = \frac{G_Y(r)}{\mathbb{P}(Y=0)}$.
Donc, $\mathrm{Re}(F(z)) \leq \ln C + \lambda(|z|-1)$.
Afin de conclure, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit $f = u + iv$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, alors si $A(r) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$, on a*

1. $\forall n \geq 1, r > 0, |a_n| \leq 2\frac{A(r)-u(0)}{r^n}$.
2. *Si $d \geq 0$ et $A(r) = O(r^d)$ alors f est une fonction polynomiale de degré $\leq d$.*

Preuve : Soit $r > 0$, la série $\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ converge uniformément vers $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$ donc $\begin{cases} a_n r^n & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \quad L_1 \\ 0 & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{in\theta}\mathrm{d}\theta \quad L_2 \end{cases}$. Donc en effectuant $L_1 + \overline{L_2}$, on a

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - A(r))e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A(r)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta}_{=0} \end{aligned}$$

D'où $|a_n r^n| = |a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (A(r) - u(re^{i\theta}))\mathrm{d}\theta$.
Or, $a_0 r^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = f(0)$ donc $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$ d'où l'inégalité $|a_n| \leq 2\frac{A(r)-u(0)}{r^n}$.
De plus, si $A(r) = O(r^d)$, alors en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité, on a $a_n = 0$ pour $n > d$ donc f est une fonction polynomiale de degré $\leq d$. $\square$

Le lemme s'applique à la fonction F et $d = 1$, F est donc de la forme $F(z) = \alpha z + a$.
Or, $G_X(1) = 1$ donc $e^\alpha e^a = 1$ donc $G_X(z) = e^{\alpha(z-1)}$.
Comme $G'_X(z) = \alpha e^{\alpha(z-1)}$, on a $G'_X(1) = \alpha$. Comme $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) \geq 1$, on a $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Donc $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$.
De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $\alpha + \beta = \lambda$. $\square$

Références

[1] Hervé Queffélec et Martine Queffélec. *Analyse complexe et applications*. Calvage Mounet, 2017.